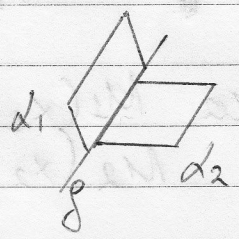
АГ Иванов-Заместник 06.12

g - права



$\alpha_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = l_1(xyz) = 0$

$\alpha_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = l_2(xyz) = 0$

$S(g) = S(\alpha_1\alpha_2)$ $\quad$ $S(g)$ - сноп равнини

I]

За $\forall (\lambda_1\lambda_2) \neq (0,0)$ уравнението $\lambda_1 l_1(xyz) + \lambda_2 l_2(xyz) = 0$ е уравнение на някаква равнина $\alpha \in S(\alpha_1\alpha_2)$

Обратно:

$\forall \alpha \in S(\alpha_1\alpha_2)$ има уравнение от вида $\lambda_1 l_1(xyz) + \lambda_2 l_2(xyz) = 0$ при условие $(\lambda_1\lambda_2) \neq (0,0)$

Док-во ($\Rightarrow$)

Нека α има уравнението $\lambda_1 l_1(xyz) + \lambda_2 l_2(xyz) = 0$ при условие $(\lambda_1\lambda_2) \neq (0,0)$

$\lambda_1 l_1(xyz) + \lambda_2 l_2(xyz) = \lambda_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) =$

$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)x + (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)y + (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2)z$

$\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \rightarrow$ допуснали че $a = b = c \Rightarrow$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ - невъзможно защото $\alpha_1 \cap \alpha_2 = g \Rightarrow$

$\lambda_1\alpha_1(xyz) + \lambda_2\alpha_2(xyz)$ е уравнение на някаква равнина α

$? \; l \in S(\alpha_1 \alpha_2)$

Нека $M_1(x_1 y_1 z_1) \in q \Rightarrow M_1 \in \alpha_1 \alpha_2$
$M_2(x_2 y_2 z_2) \in q \Rightarrow M_2 \in \alpha_1 \alpha_2 \Rightarrow$

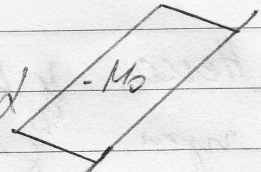
$l_1(x_1 y_1 z_1) - l_2(x_2 y_2 z_2) = 0 \Rightarrow l(x_1 y_1 z_1) = l(x_2 y_2 z_2) = 0$

$\Rightarrow M_1, M_2 \in \alpha \Rightarrow q \subset \alpha \Rightarrow \alpha \in S(q)$

Док - во ($\Leftarrow$)

Нека $\alpha \in S(\alpha_1 \alpha_2)$ и т. $M_0 \in \alpha$, но $M_0 \notin q$. Разглеждаме равнината β: $\overline{\lambda_1} l_1(x_1 y_1 z_1) + \overline{\lambda_2} l_2(x_2 y_2 z_2) = 0$, където $\overline{\lambda_1} = l_1(M_0)$, $\overline{\lambda_2} = l_2(M_0) \Rightarrow (\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}) \neq (0,0)$, защото $M_0 \notin \rho \Rightarrow$
β: $\overline{\lambda_1} l_1(x_1 y_1 z_1) + \overline{\lambda_2} l_2(x_2 y_2 z_2) = 0$ е уравнение от $S(q) \Rightarrow \beta \in S(q)$

$? \; M_0 \in S$
$\overline{\lambda_1} l_1(M_0) + \overline{\lambda_2} l_2(M_0) = -l_2(M_0) l_1(M_0) + l_1(M_0) l_2(M_0) = 0 \Rightarrow$
$\alpha \equiv \beta$



Аналитично представяне на вида $S(q) = S(\alpha_1 \alpha_2)$

$S(q)$: $\lambda_1 l_1(xyz) + \lambda_2 l_2(xyz) = 0$ при $(\lambda_1 \lambda_2) \neq (0,0)$

Ако $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1 \Rightarrow$ уравнението на α_2
$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ уравнението на α_1

Забележка

Нека $q = \alpha_1 \cap \alpha_2$
α_1 : $a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$
α_2 : $a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$ (#) Не е вярно $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

Допускаме $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \det\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right) \neq 0 \Rightarrow$

(#) може да се реши относно x и y

$\left.\begin{aligned} x &= a_2 + p \\ y &= b_2 + q \end{aligned}\right\}$ канонични уравнения на p зададена като $p = \alpha_1 \cap \alpha_2$

Полагаме $z = \lambda \Rightarrow p: \begin{cases} x = p + \lambda a \\ y = q + \lambda b \\ z = 0 + \lambda_1 \end{cases} \Rightarrow$

$p: M(pq0) \qquad p \parallel \vec{p}(ab1) \Rightarrow p \cap Oxy = т.M$

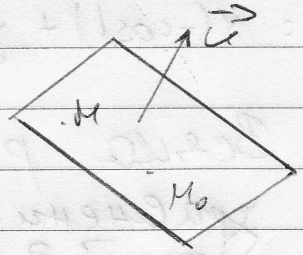
в случая когато е в сила $\det\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right) \neq 0$ p пресича Oxy

Уравнение на равнина през точка минаваща през вектор

Нека $\vec{u} \neq \vec{0}$, т.$M_0(x_0 y_0 z_0)$ $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ - ОКС

Искаме да изведем уравнението на

$\alpha: \begin{cases} \ni т.M_0 \\ \perp \vec{u} \end{cases}$



т.$M(xyz) \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{u} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{M_0M}\,\vec{u} = 0$

$\overrightarrow{M_0M} \parallel (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \Rightarrow \alpha: (x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0$

общо уравнение на α

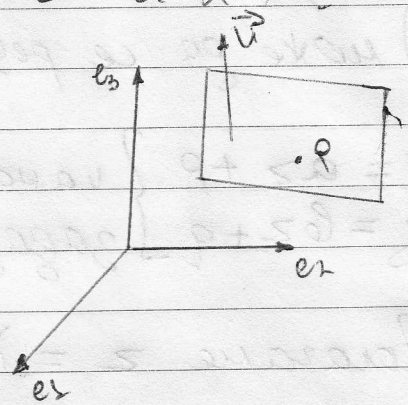
$\alpha \begin{cases} \ni т.M_0(x_0 y_0 z_0) \\ \perp \vec{u}(xyz) \end{cases}$

$\alpha: F\vec{u} = 0$ - векторно уравнение

Нормално уравнение на равнината

ОКС $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$

Нека $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ и $\alpha \neq 0$



Нека т. $P \in \alpha$

$OP \perp \alpha$

$|\vec{OP}| = p$, $|\vec{u}| = 1$

$\vec{u}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ където

$\alpha = \sphericalangle(\vec{e}_1, \vec{u})_e$

$\beta = \sphericalangle(\vec{e}_2, \vec{u})_e$

$\gamma = \sphericalangle(\vec{e}_3, \vec{u})_e$

} директорни косинуси на $\vec{u}$

т. $M(x,y,z) \in \alpha \iff \vec{PM} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{OP}(p\cos\alpha, p\cos\beta, p\cos\gamma)$

$\vec{PM}(x - p\cos\alpha, y - p\cos\beta, z - p\cos\gamma)$

но $\vec{PM}\vec{u} = 0 \Rightarrow \alpha$ има вида

$$(x - p\cos\alpha)\cos\alpha + (y - p\cos\beta)\cos\beta + (z - p\cos\gamma)\cos\gamma = 0$$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \Rightarrow$

$\alpha: x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ } за $\vec{u}$ - положително насочена нормално уравнение на равнината

$\alpha: x(-\cos\alpha) + y(-\cos\beta) + z(-\cos\gamma) + p = 0$ } за $-\vec{u}$ - отрицателно насочена

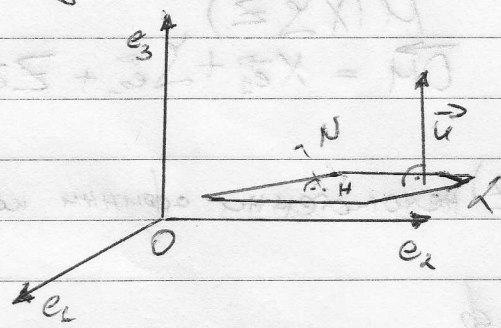
Всяка равнина има точно две нормални уравнения за $\vec{u}$ - положителен и $-\vec{u}$ - отрицателен

$\Rightarrow \exists \mathcal{P}\ (\mathcal{P} \neq 0) \Rightarrow a = \mathcal{P}\cos\alpha,\ b = \mathcal{P}\cos\beta,\ c = \mathcal{P}\cos\gamma,\ d = \mathcal{P}(-p)$

$$\mathcal{P} = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\quad \cos\alpha = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow \text{Т.Н.С.}$$

$$\cos\beta = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\quad \cos\gamma = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\quad p = \pm\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Уравнение на точка до равнина



Нека т. $N(x_0\ y_0\ z_0)$

$\tau H \in \alpha$, $H(x_1, y_1, z_1)$

$\overrightarrow{HN} \perp \alpha \Rightarrow \exists\, \delta : \overrightarrow{HN} = \delta \vec{u}$

δ - ориентирано разстояние от т. N до α определено от $\vec{u}$

Бележим δ_N^α. Ясно е че

$|\delta_N^\alpha| = d(N, \alpha)$ - абсолютното разстояние от N до α

$\overrightarrow{HN}(x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$ от $\delta : \overrightarrow{HN} = \delta \vec{u} \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} x_0 - x_1 &= \delta\cos\alpha \\ y_0 - y_1 &= \delta\cos\beta \\ z_0 - z_1 &= \delta\cos\gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= x_0 - \delta\cos\alpha \\ y_1 &= y_0 - \delta\cos\beta \\ z_1 &= z_0 - \delta\cos\gamma \end{aligned}$$

от $H \in \alpha \Rightarrow \cos\alpha(x_0 - \cos\alpha) + \cos\beta(y_0 - \cos\beta) + \cos\gamma(z_0 - \cos\gamma) - p = 0$

$\Phi \Rightarrow \delta = (\cos\alpha)x_0 + (\cos\beta)y_0 + (\cos\gamma)z_0 - p = \delta_N^\alpha$

ориентирано разстояние

Забележка

$\delta_N^\alpha > 0$ ако τN е в онова полупространство определено от α към което сочи $\vec{u}$ (λ)

$\delta_N^\alpha < 0$ ако τN е в другото полупространство

$\delta_N^\alpha = 0$ ако т. $N \in \alpha$

Безкрайни точки. Хомогенни координати

(разширено евклидово пространство)

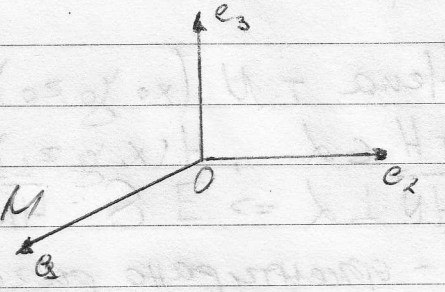
$\mathbb{R}^3(R_3, \mathcal{E}^3)$ - евклидово пространство

обектите точка, права и равнина ще наричаме крайни

Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ АКС в R^3

$M(X,Y,Z)$

$\overrightarrow{OM} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2 + Z\vec{e}_3$



(X,Y,Z) нехомогенни афинни координати на M

Деф

Всяка наредена четворка числа (x,y,z,t) за $t \neq 0$ и т. че $\frac{x}{t} = X$, $\frac{y}{t} = Y$, $\frac{z}{t} = Z$ наричаме афинни координати на т. M

Забележка

1) Ако (x,y,z,t) са афинни хомогенни координати на M то $\rho x, \rho y, \rho z, \rho t$ са също афинни хомогенни координати на M $\rho \neq 0$

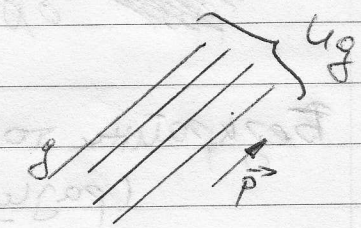
АХК АНК

2) Ако (X,Y,Z) са нехомогенни афинни координати на M то четворката $(X,Y,Z,1)$ са хомогенни афинни координати на M

Дефиниция за безкрайна точка

Нека g - права в

Множеството от всички прави в пространството $\parallel g$ заедно с g наричаме безкрайна точка определена от g. Бележим U_g



Ако $\vec{p} \neq 0$, $\vec{p} \parallel g$ то U_g се задава чрез $\vec{p}$ т.е. $U_g = U_{\vec{p}}$

Ако $\vec{p}(a,b,c)$ то $U_{\vec{p}}(a,b,c,0)$ - хомогенни координати на безкрайна точка $U_{\vec{p}}$ определена от $\vec{p}(a,b,c)$

Нека $g: \begin{cases} \ni т. M_0(x_0 y_0 z_0) \\ \parallel \vec{p}(a b c) \end{cases}$

$т. M(x y z) \in g \Leftrightarrow g: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$

Ако $M \neq M_0$ т.е. $\lambda \neq 0$ то

$M\left(\frac{x_0}{\lambda} + a, \frac{y_0}{\lambda} + b, \frac{z_0}{\lambda} + c, \frac{1}{\lambda}\right)$

Ако $\lambda \to \infty \Rightarrow M^*(a b c 0) = U_g$

Забележка

Всяка четворка числа $(x y z t) \neq (0000)$ представлява АХК на някаква точка

1) ако $t \neq 0$, то тази точка е крайна с нямо координата $\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right)$

2) Ако $t = 0 \Rightarrow (x y z) \neq (000)$ то тази точка е безкрайна определена от вектора $\vec{p}(x y z)$

Дефиниция

Разширена евклидова права

$$\boxed{\bar{g} = g \cup U_g}$$

Дефиниция

Множеството от всички безкрайни точки в пространството наричаме безкрайна равнина на $\mathbb{R}^3$ - означаваме Ω_2

Разширено евклидово пространство $\overline{\mathbb{R}^3} = \mathbb{R}^3 \cup \Omega_2$

Параметрично представяне на крайна права в $\overline{\mathbb{R}^3}$

Забележка

Аналогично на понятието безкрайна точка в пространството се въвежда понятието безкрайна точка в равнината R_2 (евклидова равнина) но само липсва z от координатите

Множеството от всички безкрайни точки в равнината наричаме безкрайна права на равнината и означаваме с Ω_1

Разширена равнина $(\mathbb{R}^2)$ означаваме с $\overline{\mathbb{R}^2} = R^2 \cup \Omega_1$

Нека $\rho: \begin{cases} \exists M_0(x_0, y_0, z_0) \\ \parallel \vec{p}(a,b,c) \end{cases} \Rightarrow g: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$ $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ НК

нехомогенни координати

$$g: \begin{cases} x = \frac{x_0}{\tau} + a;\ y = \frac{y_0}{\tau}\ z = \frac{z_0}{\tau} + c, \quad t = \frac{1}{\lambda} \\ M \neq M_0 \quad \text{хомогенни координати} \quad \text{ХК} \end{cases}$$

Ако $(xyzt)$ са ХК на M то $\frac{x}{\tau}, \frac{y}{\tau}, \frac{z}{\tau}, \frac{t}{\tau}$ са

хомогенни координати на $M_0 \Rightarrow \vec{Up}(abc0)$

има смисъл $M(xyzt)$

$$\Phi \quad \boxed{M = \frac{1}{\tau} M_0 + \vec{Up}} \ /\cdot\lambda \Rightarrow M = M_0 + \lambda \vec{Up}$$

Ако $M_1 M_2$ са две различни точки от g то $\exists \lambda_1 \neq \lambda_2$ т.ч. $M_1 = M_0 + \lambda_1 \vec{Up}$; $M_2 = M_0 + \lambda_2 \vec{Up} \Rightarrow$

т.е. имаме $\boxed{M = M_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} M_2}$ (*)

$M_1 = M_0 + \lambda_1 \vec{U_p}$; $M_2 = M_0 + \lambda_2 \vec{U_p} \Rightarrow$

$$M_0 + \lambda_1 \vec{U_p} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(M_0 + \lambda_2 \vec{U_p}\right)$$

$$\left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) M_0 + \underbrace{\left(\lambda_1 + \lambda_2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)}_{\gamma} \vec{U_p}$$

но $\alpha_1 = \frac{\lambda - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$ и $\alpha_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 - \lambda_2} \Rightarrow$

$$1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1 + \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 - \lambda_2} \Rightarrow M = M_0 + \gamma \vec{U_p} \Rightarrow$$

точно параметрично уравнение $\Rightarrow M_0 \in \rho$

Доказана е следната теорема

Ако $M_1 \neq M_2$ са 2 точки, то по формулата $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ при $(\lambda_1 \lambda_2) \neq (0,0)$ се получават точките от $M_1 M_2$ и само те
(параметрично представяне на правата $M_1 M_2$ в $\overline{\mathbb{R}^3}$)

Забележка

1) $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ важи и в $\overline{\mathbb{R}^2}$
(там имаме само xyt (махаме само z))

2) Ако M_1 - крайна а M_2 - безкрайна, $M_2 = \vec{U_p}$ то $g = M_1 M_2$ означава че $g: \begin{cases} \ni M_1 \\ \parallel \vec{p} \end{cases}$

$$M_1 - M_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{Up} \Rightarrow \boxed{\vec{Up} = \frac{M_1 - M_2}{\lambda_1 - \lambda_2}}$$ ϕ

$$M_1 = M_0 + \lambda_1 \frac{M_1 - M_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \Rightarrow M_0 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)M_0 - \lambda_1(M_1 - M_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$= \boxed{\frac{\lambda_1 M_2 - \lambda_2 M_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = M_0}$$ ϕ

Заместване $\vec{Up}$ и M_0 в M

$$M = \frac{\lambda_1 M_2 - \lambda_2 M_1}{\lambda_1 - \lambda_2} + \lambda \frac{M_1 - M_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$\underbrace{\frac{\lambda - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}}_{\alpha_1} M_1 + \underbrace{\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 - \lambda_2}}_{\alpha_2} M_2 = \underbrace{\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2}_{M}$$

$\Rightarrow$ Ако т. $M \in q$ то хомогенните координати на M_1 и M_2 ($M_1, M_2 \in q$) са свързани посредством пространство $M = \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2$ при $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0)$

Обратно

Нека M се представя посредством $M = \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2$ при условие $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0)$. Да допуснем $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\alpha_1} M}_{M} = M_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} M_2$